PART4　2 つの円

例題

(1)　2 つの円 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ と $(x-6)^2+(y-3)^2=20$ が異なる 2 点で交わるとき，定数 r の値の範囲を求めよ。

(2)　2 つの円 $x^2+y^2=10$，$x^2+y^2-2x+6y+2=0$ の共有点の座標を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　2つの円 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ と $(x-4)^2+(y+3)^2=r^2$ $(r>0)$ が異なる2点で交わるとき，定数 r の値の範囲を求めよ。

(2)　2つの円 $x^2+y^2-6x+5=0$，$x^2+y^2-2x-2y+1=0$ の共有点の座標を求めよ。

第 6 講　PART4 確認問題

1　2 つの円

$(x-2)^2+(y+1)^2=1$ と $(x-3)^2+(y-2)^2=r^2$ $(r>0)$

が異なる 2 点で交わるとき，定数 r の値の範囲を求めよ。

$\sqrt{\boxed{\text{アイ}}}-\boxed{\text{ウ}}<r<\boxed{\text{エ}}+\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}$

2　2 つの円 $x^2+y^2=5$，$x^2+y^2+6x+2y+5=0$ の共有点の座標を求めよ。

$\left(\boxed{\text{キク}},\ \boxed{\text{ケコ}}\right)$，$\left(\boxed{\text{サシ}},\ \boxed{\text{ス}}\right)$

PART4　２つの円

例題

(1)　２つの円 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ と $(x-6)^2+(y-3)^2=20$ が異なる２点で交わるとき，定数 r の値の範囲を求めよ。

(2)　２つの円 $x^2+y^2=10$，$x^2+y^2-2x+6y+2=0$ の共有点の座標を求めよ。

(1)　２つの円 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ …… ①，$(x-6)^2+(y-3)^2=20$ …… ② について

円①の中心は点 $(0,\ 0)$，半径は r，円②の中心は点 $(6,\ 3)$，半径は $2\sqrt{5}$

また，２つの円①，②の中心間の距離は $\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$

よって，２つの円①と②が異なる２点で交わるのは

$$|r-2\sqrt{5}|<3\sqrt{5}<r+2\sqrt{5}$$

$|r-2\sqrt{5}|<3\sqrt{5}$ より

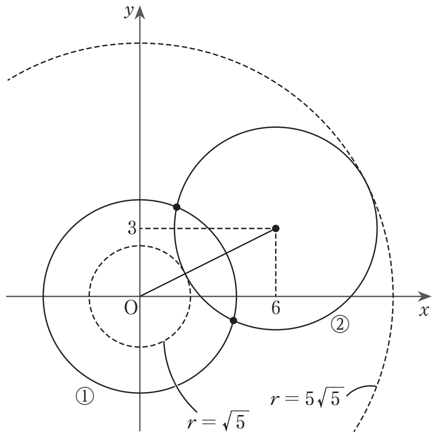
$$-3\sqrt{5}<r-2\sqrt{5}<3\sqrt{5}$$

よって，$-\sqrt{5}<r<5\sqrt{5}$ …… ③

$3\sqrt{5}<r+2\sqrt{5}$ より　$\sqrt{5}<r$ …… ④

③，④および，$r>0$ より

$$\sqrt{5}<r<5\sqrt{5}$$



(2)　$\begin{cases} x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2-2x+6y+2=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

②－①より　$-2x+6y+2=-10$　よって　$x=3y+6$ …… ③

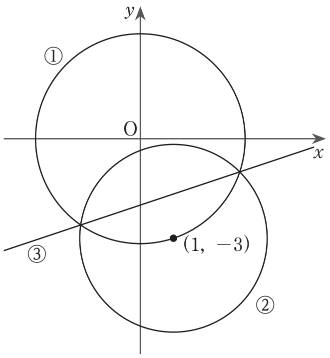
③を①に代入して　$(3y+6)^2+y^2=10$

整理して　$5y^2+18y+13=0$

よって　$y=-\dfrac{13}{5},\ -1$

$y=-\dfrac{13}{5}$ のとき $x=-\dfrac{9}{5}$，$y=-1$ のとき $x=3$

したがって，求める共有点の座標は $\left(-\dfrac{9}{5},\ -\dfrac{13}{5}\right)$，$(3,\ -1)$



練習

(1)　2 つの円 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ と $(x-4)^2+(y+3)^2=r^2$ $(r>0)$ が異なる 2 点で交わるとき，定数 r の値の範囲を求めよ。

(2)　2 つの円 $x^2+y^2-6x+5=0$，$x^2+y^2-2x-2y+1=0$ の共有点の座標を求めよ。

(1)　2 つの円 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ …… ①，$(x-4)^2+(y+3)^2=r^2$ $(r>0)$ …… ②について

円①の中心は点 $(1,\ 1)$，半径は 2，円②の中心は点 $(4,\ -3)$，半径は r

また，2 つの円①，②の中心間の距離は $\sqrt{(4-1)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

よって，2 つの円①と②が異なる 2 点で交わるのは

$|r-2|<5<r+2$

$|r-2|<5$ より

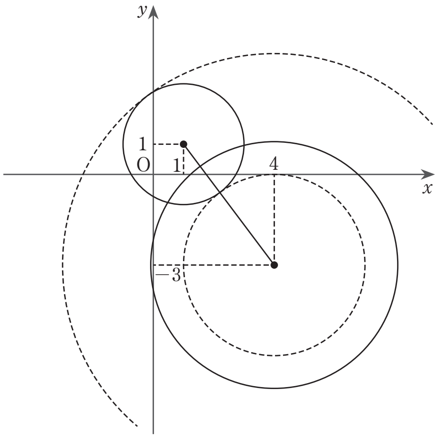
$-5<r-2<5$

よって，$-3<r<7$ …… ③

$5<r+2$ より　$3<r$ …… ④

③，④および，$r>0$ より

$3<r<7$



(2)　$\begin{cases} x^2+y^2-6x+5=0 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2-2x-2y+1=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

②－①より　$4x-2y-4=0$　よって $y=2x-2$ …… ③

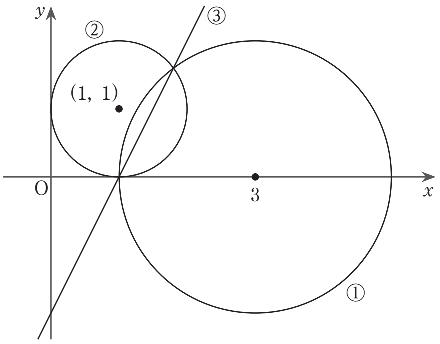
③を①に代入して　$x^2+(2x-2)^2-6x+5=0$

整理して　$5x^2-14x+9=0$

よって　$x=\dfrac{9}{5}$，1

$x=\dfrac{9}{5}$ のとき $y=\dfrac{8}{5}$，$x=1$ のとき $y=0$

したがって，求める共有点の座標は $\left(\dfrac{9}{5},\ \dfrac{8}{5}\right)$，$(1,\ 0)$



第 6 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] アイ：10，ウ：1，エ：1，オカ：10

[解説]

2 つの円 $(x-2)^2+(y+1)^2=1$　……①，

$(x-3)^2+(y-2)^2=r^2\,(r>0)$　……②について

円①の中心は点 $(2,\ -1)$，半径は 1，円②の中心は点 $(3,\ 2)$，半径は r

また，2 つの円①，②の中心間の距離は

$$\sqrt{(3-2)^2+\{2-(-1)\}^2}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$$

よって，2 つの円①と②が異なる 2 点で交わる条件は

$$|r-1|<\sqrt{10}<r+1$$ [A]

$|r-1|<\sqrt{10}$ より

$$-\sqrt{10}<r-1<\sqrt{10}$$

よって

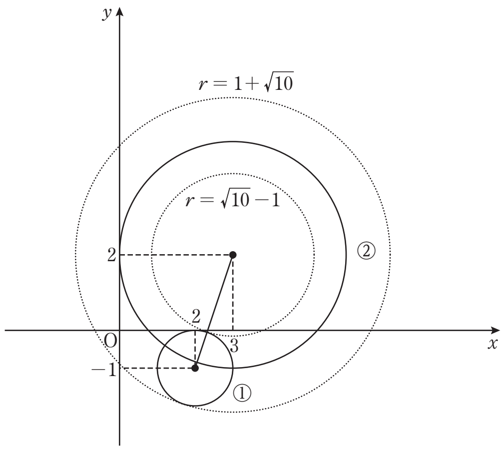
$$1-\sqrt{10}<r<1+\sqrt{10}\quad\cdots\cdots③$$

$\sqrt{10}<r+1$ より

$$\sqrt{10}-1<r\quad\cdots\cdots④$$

③，④および，$r>0$ より

$$\boldsymbol{\sqrt{10}-1<r<1+\sqrt{10}}$$



[A]　2 つの円の位置関係

2 つの円の位置関係は，2 円の半径 r，$r'\,(r>r')$ と中心間の距離 d によって，5 つの場合に分類することができる。

[1]　互いに外部にある
　$\iff d>r+r'$

[2]　外接する
　$\iff d=r+r'$

[3]　2 点で交わる
　$\iff r-r'<d<r+r'$

[4]　内接する
　$\iff d=r-r'$

[5]　一方が他方の内部にある
　$\iff d<r-r'$

2 [正解] キク：-1，ケコ：-2，サシ：-2，ス：1

[解説]

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots① \\ x^2+y^2+6x+2y+5=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

②－①より

$$6x+2y+5=-5$$ [B] [C]

よって

$$y=-3x-5 \quad \cdots\cdots③$$

③を①に代入して

$$x^2+(-3x-5)^2=5$$

$$10x^2+30x+20=0$$

$$x^2+3x+2=0$$

$$(x+1)(x+2)=0$$

よって

$$x=-1,\ -2$$

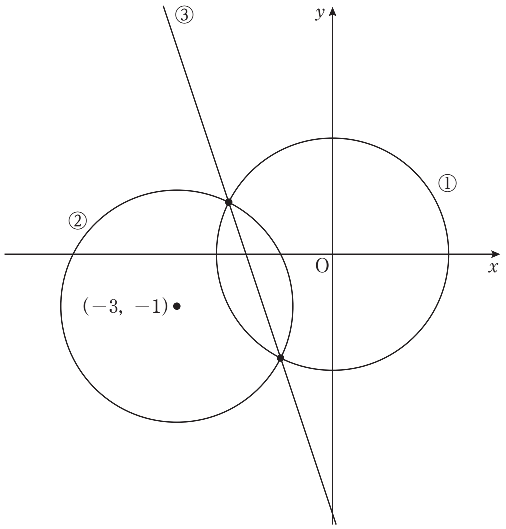
③より

$x=-1$ のとき $y=-2$

$x=-2$ のとき $y=1$

よって，求める共有点の座標は

$(-1,\ -2)$，$(-2,\ 1)$



[B]　共有点をもつ２円の方程式を辺々引くことで，２次の項を消去して得られる x，y の１次方程式は，２円の共有点を通る直線の方程式である。

[C]　２つの円の共有点の座標
２つの円が共有点をもつとき，その共有点の座標は，２つの円の方程式を連立させた連立方程式の実数解として得られる。